Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 23, pp. 961–970
0017-9310/80/0701-0961 $02.00/0

WÄRMELEITFÄHIGKEITSMESSUNGEN MIT DEM PLATTENGERÄT: EINFLUß DER SCHUTZRINGBREITE AUF DIE MEßUNSICHERHEIT

K.-H. BODE
Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Bundesallee 100,
D-3300 Braunschweig, West Germany

(*Received* 31 *July* 1979)

Zusammenfassung—Für Ein- und Zweiplattengeräte mit Schutzring wird das Temperaturfeld im Probekörper für kreisförmige und quadratische Platten berechnet und hieraus der Fehler abgeleitet, der durch den Wärmeaustausch am äußeren Rand des Schutzringes bei isothermen Heiz- und Kühlplatten und idealem Wärmekontakt entsteht. Der Fehler erweist sich als proportional zur reduzierten Temperaturdifferenz (Differenz zwischen mittlerer Probekörpertemperatur und Umgebungstemperatur geteilt durch Temperaturdifferenz zwischen Heiz- und Kühlplatte), wodurch der Randfehler durch entsprechendes Einstellen der Umgebungstemperatur optimal verlkeinert werden kann. Experimente an einem Extruderschaum bestätigen die Folgerungen der rechnerischen Analyse. Für Plattengeräte gebräuchlicher Größen ermöglichen Diagramme und Tabellen, die aufgrund der abgeleiteten Beziehungen berechnet wurden, eine Randfehlerabschätzung der jeweiligen Meßanordnungen.

FORMELZEICHEN

A,	Meßfläche;
A_n,	n-ter Koeffizient der Fourierreihe (3a);
a,	halbe Kantenlänge der quadratischen Platte;
α,	Wärmeübergangskoeffizient;
$\beta_{n,m}$,	Abkürzung nach Gl. (8);
$C_{n,m}$,	Koeffizient der Doppelreihe (3b);
c,	halbe äußere Kantenlänge des quadratischen Schutzringes;
ϑ,	Temperatur;
ϑ_1,	isotherme Kühlplattentemperatur;
ϑ_2,	isotherme Heizplatten- und Schutzheizringtemperatur;
ϑ_m,	arithmetische Mitteltemperatur $0{,}5\,(\vartheta_1 + \vartheta_2)$;
ϑ_u,	konstante Umgebungstemperatur;
$\Delta\vartheta$,	Temperaturdifferenz $(\vartheta_2 - \vartheta_1)$ zwischen Heiz- u.Kühlplatte;
I_0, I_1,	modifizierte Besselfunktionen erster Art und nullter bzw. erster Ordnung;
F_1, F_2,	Fehlerfaktoren Gl. (9);
λ,	Wärmeleitfähigkeit der Probe;
λ_s,	scheinbare, gemessene Wärmeleitfähigkeit der Probe;
λ_D,	Wärmeleitfähigkeit des Dämmstoffes;
p,	dimensionsloser Wärmeaustauschparameter Gl. (5a) bzw. (5b);
r, z,	Zylinderkoordinaten;
r_0,	Probenhalbmesser;
r_2,	Schutzringhalbmesser außen;
ρ,	Abkürzung $n\pi r/z_0$;
W,	Wärmeleistung;
VS,	dimensionsloses Verhältnis Probenhöhe z_0 zum Plattendurchmesser $2\,r_0$ bzw. zur Kantenlänge $2a$;
VB,	dimensionsloses Verhältnis Schutzringbreite $(r_2 - r_0)$ bzw. $(c - a)$ zum Plattendurchmesser $2\,r_0$ bzw. zur Kantenlänge $2a$;
x, y, z,	Kartesische Koordinaten;
Δx,	Abstand Außenkante Schutzring bis zur 'Umgebung';
z_0,	Probenhöhe;
ξ_m,	m-te Wurzel der Gl. (7).

1. EINLEITUNG

DAS 'SCHUTZRINGPRINZIP', das bei Ein- und Zweiplattengeräten für die Messung der Wärmeleitfähigkeit an Wärmeisolierstoffen praktiziert wird, ist durch die Arbeit von R. Poensgen [1] 1912 im deutschsprachigen Gebiet bekannt geworden*. Der Schutzring soll Abweichungen des Temperaturfeldes im Testkörper vom idealen homogenen Feld, das sich als Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungs-Differentialglei-

* Poensgen erwähnt zwei Vorläufer, die beide auf dem II. internationalen Kälte-Kongreß, Wien, 1910 (im Band II des Berichts veröffentlicht) über Schutzringanwendungen berichteten: E. R. Metz u.A. Behne: 'Neue Apparate zur Bestimmung des Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten', S.193; R. Biquard: 'L'éffacacité des divers moyens d'isolement thermique des locaux frigorifiques.—Essays sur la conductibilité colorifique.', S.187. Als erster scheint A. Berget (C.r. 105 (1887) S.224; *J. Phys.* (2) 7 (1888) S.503) einen Schutzring (bzw. Schutzzylinder) bei Wärmeleitfähigkeitsmessungen (an Quecksilber) angewandt zu haben. Berget verweist in seinen Arbeiten auf das elektrische Vorbild nach W. Thomson, der zur Sicherung eines homogenen elektrischen Potentialfelds einen 'guard ring' verwendete und wohl der Vater des 'Schutzringprinzips' ist. Die älteste dem Verfasser bekannte Quelle ist Thomsons 'Report on Electrometers and Electrostatic Measurements' im Report of the 37th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, held at Dundee in September 1867 (1868), London.

chung ergibt, verhindern und damit die Gültigkeit der einfachen Auswertung der Versuchsdaten sichern.

Qualitativ gilt: Je breiter der Schutzring im Vergleich zum Probendurchmesser und zur Probenhöhe ist, umso mehr 'schützt' er das Temperaturfeld vor Verzerrungen. Über das quantitative Ausmaß der Schutzwirkung ist nur wenig bekannt. So stützen sich die Dimensionierungsempfehlungen der in- und ausländischen Normblätter (z.B. DIN 52 612 [3]) vorwiegend auf experimentelle Erfahrung. Einige amerikanische Autoren (z.B. Woodside [2]) haben Berechnungen veröffentlicht, in denen das Problem zweidimensional behandelt wird und nicht realisierbare Randbedingungen vorausgesetzt werden.

Um die Teilnahme an einem Ringversuch, bei dem die Wärmeleitfähigkeit eines Extruderschaumes (Wärmeleitfähigkeit nahe der von Luft) gemessen werden sollte, zu ermöglichen, war es erforderlich, über eine genauere Kenntnis der quantitativen Abhängigkeit des Randfehlers von geometrischen und thermischen Größen des Versuchaufbaues zu verfügen: Während die anderen Institute Geräte für quadratische Probeplatten von 500 mm Kantenlänge bei einer Probenhöhe von 50 mm verwendeten, stand in der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) nur ein Apparat für kreisförmige Platten von 120 mm Durchmesser zur Verfügung. Für die PTB-Apparatur hätte die Probenhöhe auf ein angemessenes Maß, das durch Erfahrungswerte gegeben war, reduziert werden müssen. Das war aber nicht ohne weiteres statthaft, weil bei Schäumen hinreichend geringer Rohdichte aufgrund von Strahlungseinflüssen sich die gemessene 'effektive' Wärmeleitfähigkeit mit der Höhe der Probe ändern kann.

Es wurde darum versucht, den Einfluß der Schutzringbreite bei Geräten mit Kreis- oder Quadratplatten zu analysieren. Die Berechnungen der vorliegenden Arbeit ergeben eine einfache Gesetzmäßigkeit des Randfehlers in Abhängigkeit von geräteseitig gegebenen Größen.

2. DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN NEBST RANDBEDINGUNGEN UND IHRE LOSUNGEN

Für die folgenden Betrachtungen werde einschränkend eine homogene und isotrope Probe mit konstanter Wärmeleitfähigkeit λ vorausgesetzt. Der bewährten Meßpraxis bei Material mit relativ kleinem λ entsprechend soll der Meßkörper ohne Unterbrechung den Meßquerschnitt und das Schutzringgebiet bis zu dessem äußeren Rand bedecken. Um ausschließlich den Schutzringeinfluß untersuchen zu können, werden andere mögliche Fehler dadurch eliminiert, daß beide Stirnseiten der Probe einschließlich des Schutzrings als isotherm und der Wärmekontakt zwischen Heiz- bwz. Kühlplatten und den Probenoberflächen als vollkommen angenommen werden. (Voraussetzungen, die bei kleinem λ der Probe und der hohen Wärmeleitfähigkeit des Begrenzungsmaterials – beispielsweise aus Kupfer – realistisch sind).

Koordinatenfestlegung: Bei der kreisförmigen und der quadratischen Platte sei der Koordinatensprung in das Zentrum der isothermen Kühlplattenseite mit der Temperatur ϑ_1 gelegt (siehe Abb. 1); normal zu dieser isothermen, ebenen Fläche sei die axiale Koordinate z; die ebenfalls isotherme Heizfläche befinde sich bei z_0 (z_0 ist die Probenhöhe). Für die Kreisplatte gelte die radiale Koordinate r mit r_0 als Probenradius und r_2 als äußere Begrenzung. Bei der quadratischen Platte gelten die kartesischen Koordinaten, x, y, wobei die halbe Kantenlänge $x = a$ und $y = a$ und die äußere Begrenzung des durchgehenden Probekörpers $x = c$ und $y = c$ seien†. r_0 bzw. a soll die Mitte zwischen Heizplattenrand und innerer Heizringbegrenzung sein. Als Meßfläche A ist somit πr_0^2 bzw. $4a^2$ einzusetzen. Die angrenzende 'Umgebung' von konstanter Temperatur ϑ_u ist bei ungeschützter Versuchsanordnung die Zimmerluft, bei Verwendung von Schutzabdeckungen die Abdeckwand am Orte $r_2 + \Delta x$ bzw. $a + \Delta x$. Für den Wärmeaustausch am äußeren Probekörperrand r_2 bzw. c gelte das Newtonsche Abkühlungsgesetz mit dem Wärmeübergangskoeffizienten-α, der bei Verwendung eines Wärmedämmstoffes der Wärmeleitfähigkeit λ_D zwischen Probenwand und Schutzhaube näherungsweise ersetzt wird durch

$$\alpha \approx \lambda_D \Big/ \left[r_2 \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{r_2}\right) \right]$$

im Kreisfall oder $\alpha = \lambda_D/\Delta x$ beim Quadrat.

2.1. *Kreisförmiger Probenquerschnitt*

Das Temperaturfeld $\vartheta(z,r)$ ist festgelegt durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} = 0 \tag{1a}$$

und die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_1 \quad \text{für } z = 0, \\ \vartheta &= \vartheta_2 \quad \text{für } z = z_0 \\ -\lambda\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)_{r_2} &= \alpha[\vartheta(z,r_2) - \vartheta_u]. \end{aligned} \tag{2a}$$

Der Ansatz

$$\vartheta(z,r) = \vartheta_1 + (\vartheta_2 - \vartheta_1)\frac{z}{z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{z_0}z\right) I_0\left(\frac{n\pi}{z_0}r\right) \tag{3a}$$

genügt der Differentialgleichung (1a) und erfüllt die ersten beiden Randbedingungen. $I_0(\rho)$ ist die modofizierte Besselfunktion erster Art und nullter Ordnung.

Die Konstanten A_n der Fourierreihe werden mit Hilfe der letzten Randbedingung berechnet und erge-

† r_1 bzw. b sind vorsorglich für spätere Berücksichtigung der Anordnung mit Spalt vorbehalten.

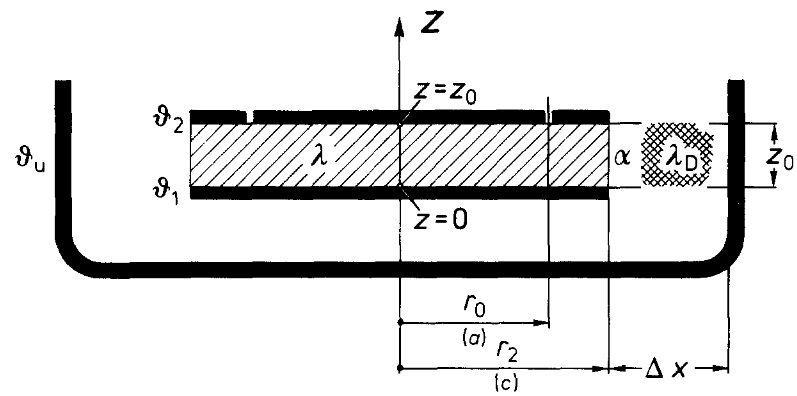

ABB. 1. Schema einer Plattenapparatur mit Schutzring. Radiale Koordinaten r für kreisförmige Platten (Plattendurchmesser $= 2r_0$); Koordinatenwerte in Klammern für quadratische Platten (Kantenlänge: $2a$). Stirnflächen des Testkörpers einschließlich der Schutzringzone (bis r_2 bzw. c) isotherm (ϑ_1; ϑ_2). Konstante 'Umgebungstemperatur' ϑ_u.

ben sich nach bekannter Rechenweise zu

$$A_n = \left.\frac{-2(\vartheta_m - \vartheta_u)}{\Delta\vartheta}\right\rangle \cdot \frac{2pz_0}{r_2 n^2 \pi^2 [I_1(\rho_2) + \frac{p}{\rho_2} I_0(\rho_2)]} \left\langle \begin{array}{l} \text{für } n = 1,3,5\ldots \\ \text{für } n = 2,4,6\ldots \end{array}\right. \tag{4a}$$

Hierin bedeuten die Abkürzungen

$$p = \frac{\alpha r_2}{\lambda}; \tag{5a}$$

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_m &= \frac{\vartheta_2 + \vartheta_1}{2}; \\ \Delta\vartheta &= \vartheta_2 - \vartheta_1; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$\rho_2 = n\pi r_2/z_0$; $I_1(\rho)$ ist die modifizierte Besselfunktion erster Art und erster Ordnung. Mit Kenntnis von A_n ist das Temperaturfeld $\vartheta(z, r)$ bekannt. Die Fourier-Reihe in Gl. (3a) ist konvergent; ihre numerische Auswertung bereitet keine Schwierigkeiten, zumal nur—je nach Genauigkeitsansprüchen—verhältnismäßig wenige Glieder zu berechnen sind. Der dimensionslose Wärmeaustauschparameter p nach Gl. (5a) darf in Gl. (4a) auch unendlich werden. Aus Gl. (4a) wird dann

$$A_n^* = \left.\frac{-2(\vartheta_m - \vartheta_u)}{\Delta\vartheta}\right\rangle \cdot \frac{2}{n\pi I_0(\rho_2)} \left\langle \begin{array}{l} \text{für } n = 1,3,5\ldots \\ \text{für } n = 2,4,6\ldots \end{array}\right. \tag{4a*}$$

2.2. *Quadratischer Probenquerschnitt*

Hier lautet die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} = 0 \tag{1b}$$

und die Randbedingungen sind

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta = \vartheta_1 \quad \text{für } z = 0 \\ &\vartheta = \vartheta_2 \quad \text{für } z = z_0 \\ &\text{und die vier Gleichungen} \\ &\mp\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=\pm c} = \alpha[\vartheta(\pm c, y, z) - \vartheta_u] \\ &\mp\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)_{y=\pm c} = \alpha[\vartheta(x, \pm c, z) - \vartheta_u] \end{aligned}\right\} \tag{2b}$$

Der Lösungsansatz ist

$$\vartheta(x,y,z) = \vartheta_1 + (\vartheta_2 - \vartheta_1)\frac{z}{z_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \times \sin\left(\frac{n\pi}{z_0}z\right)\left[\cos\left(\xi_m\frac{x}{c}\right)\cosh\left(\beta_{n,m}\frac{\alpha}{c}\right) + \cosh\left(\beta_{n,m}\frac{x}{c}\right)\cos\left(\xi_m\frac{\alpha}{c}\right)\right]. \tag{3b}$$

Unter Verwendung von

$$p = \frac{\alpha c}{\lambda} \tag{5b}$$

bedeuten die Abkürzungen in Gl. (3b)

$$\xi_m = p\,\mathrm{ctg}(\xi_m) \tag{7}$$

die m-te Wurzel dieser transzendenten Beziehung, und

$$\beta_{n,m} = \left[\left(\frac{n\pi}{z_0}z\right)^2 + \xi_m^2\right]^{1/2}. \tag{8}$$

Der Ansatz Gl. (3b) erfüllt die Differentialgleichung und genügt den ersten beiden Randbedingungen. Die restlichen vier Gleichungen (2b) führen sämtlich auf dieselbe Bestimmungsgleichung für die Konstante $C_{n,m}$, wie man sich durch Einsetzen von Gl. (3b) und ihren entsprechenden Ableitungen in jene Gleichungen (2b) überzeugen kann, womit der relativ einfache Ansatz gerechtfertigt ist.

Der n-Teil der Doppelreihe ist wieder fourierscher Art, während der m-Teil zwar ebenfalls eine trigonometrische Reihe ist, jedoch mit Funktionen des Typus

$$\cos\left(\xi_m\frac{x}{c}\right).$$

Diese cos-Funktionen sind orthogonal, d.h. es gilt

$$\int_{-c}^{+c}\cos^2\left(\xi_m\frac{x}{c}\right)dx = c\left[1+\frac{\sin\xi_m\cos\xi_m}{\xi_m}\right]$$

$$\int_{-c}^{+c}\cos\left(\xi_m\frac{x}{c}\right)\cdot\cos\left(\xi_{m'}\frac{x}{c}\right)dx = 0 \quad \text{für } m \neq m',$$

wenn ξ_m die Bedeutung von Gl. (7) hat. Ähnlich den Gesetzmäßigkeiten einer Fourier-Reihe eignen sie sich zur Reihendarstellung willkürlicher Funktionen (mit denselben Einschränkungen wie diese). Für die Bestimmung der $C_{n,m}$ in Gl. (3b) werden die Temperatur und deren Differentialquotient (am jeweiligen Rand) in die vier letzten Randbedingungsgleichungen (2b) eingesetzt. Auflösen nach den zusammengefaßten Doppelreihen führt in allen vier Fällen auf dieselbe Bestimmungsgleichung für $C_{n,m}$. Man multipliziert mit

$$\sin\left(\frac{n\pi}{z_0}z\right)\cdot\cos(\xi_m\eta)$$

(wobei $\eta = x/c$ oder $\eta = y/c$ ist) und integriert zunächst über z von $z = 0$ bis $z = z_0$, dann – unter Beachtung der angegebenen Orthogonalitätsbeziehungen – über η von $\eta = -1$ bis $\eta = +1$. Mit den Abkürzungen nach Gln. (6), (5b) und (8) sowie unter Verwendung von Gl. (7) ergibt sich

$$C_{n,m} = \frac{-2(\vartheta_m-\vartheta_u)}{\Delta\vartheta} > \frac{4}{n\pi}\cdot\frac{\xi_m\sin\xi_m}{[\xi_m^2+p\cos^2\xi_m]}$$

$$\times\frac{p}{\left[\sinh\beta_{n,m}+\dfrac{p}{\beta_{n,m}}\cosh\beta_{n,m}\right]} < \begin{matrix}\text{für } n = 1,3,5\ldots\\ \text{für } n = 2,4,6\ldots\end{matrix} \tag{4b}$$

Auch hier ist der Grenzübergang $p \to \infty$ möglich; Gl. (4b) lautet dann

$$C^*_{n,m} = \frac{-2(\vartheta_m-\vartheta_u)}{\Delta\vartheta} > \frac{4}{n\pi}\,\frac{(-1)^m}{\xi_m}$$

$$\times\frac{\beta_{n,m}}{\cosh\beta_{n,m}} < \begin{matrix}\text{für } n = 1,3,5\ldots\\ \text{für } n = 2,4,6\ldots\end{matrix} \tag{4b*}$$

3. HERLEITUNG DES FEHLERS

3.1. *Fehlerausdruck für die Kreisplatte*

Die Wärmeleistung W (die eventuell für Verluste durch Wärmeableitung durch die Verdrahtung, Stützelemente usw. korregiert sein muß), die durch die Stirnfläche (z_0, r_0) in den Probekörper eintritt, ist

$$W = 2\pi\lambda\int_0^{r_0}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)_{z_0}dr = \lambda\left[\pi r_0^2\frac{\Delta\vartheta}{z_0} + 2\pi r_0\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n I_1(\rho_0)\right]$$

mit der Abkürzung $\rho_0 = n\pi r_0/z_0$. Bei üblicher, kritikloser Versuchsauswertung ist die gemessene, scheinbare Wärmeleitfähigkeit λ_s, und es gilt

$$W = \lambda_s\pi r_0^2\frac{\Delta\vartheta}{z_0}.$$

Nach Gleichsetzen beider Gleichungen und Umordnen erhält man

$$\frac{\lambda_s-\lambda}{\lambda} = \frac{2z_0}{r_0\Delta\vartheta}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n I_1(\rho_0)$$

den Fehler, der bei unberücksichtigtem Randeinfluß besteht. Setzt man A_n nach Gl. (4a) ein, ergibt sich schließlich

$$\frac{\lambda_s-\lambda}{\lambda} = F_1 + \frac{\vartheta_m-\vartheta_u}{\Delta\vartheta}\cdot F_2. \tag{9a}$$

Hierbei bedeuten die nur von dem dimensionslosen Parameter p (Gl. (5c)) und geometrischen Größen abhängige Faktoren

$$F_1 = \frac{4z_0^2p}{\pi^2r_0r_2}\sum_{n=2,4,6\ldots}^{\infty}\frac{I_1(\rho_0)}{n^2\left[I_1(\rho_2)+\dfrac{p}{\rho_2}I_0(\rho_2)\right]}, \tag{10a}$$

$$F_2 = \frac{8z_0^2p}{\pi r_0r_2}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{I_1(\rho_0)}{n^2\left[I_1(\rho_2)+\dfrac{p}{\rho_2}I_0(\rho_2)\right]}. \tag{11a}$$

Im Grenzfall $p \to \infty$ lauten die Faktoren

$$F_1^* = \frac{4z_0}{\pi r_0}\sum_{n=2,4,6\ldots}^{\infty}\frac{I_1(\rho_0)}{nI_0(\rho_2)}, \tag{10a*}$$

$$F_2^* = \frac{8z_0}{\pi r_0}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{I_1(\rho_0)}{nI_0(\rho_2)}. \tag{11a*}$$

3.2. *Fehlerausdruck für die Quadratplatte*

In ähnlicher Weise ergeben die Rechnungen für die Quadratplatte

$$W = \lambda\int_{-a}^{+a}\int_{-a}^{+a}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)_{z_0}dx\,dy = \lambda\left[4a^2\frac{\Delta\vartheta}{z_0} + \frac{8c^2\pi}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^n C_{n,m}\frac{n}{\xi_m\beta_{n,m}} \times\sin\left(\xi_m\frac{a}{c}\right)\sinh\left(\beta_{n,m}\frac{a}{c}\right)\right]$$

sowie

$$W = \lambda_s 4a^2\frac{\Delta\vartheta}{z_0}$$

und schließlich

$$\frac{\lambda_s-\lambda}{\lambda} = \frac{2c^2\pi}{a^2\Delta\vartheta}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^n C_{n,m}\frac{n}{\xi_m\beta_{n,m}}\sin\left(\xi_m\frac{a}{c}\right)\sinh\left(\beta_{n,m}\frac{a}{c}\right).$$

Einsetzen von $C_{n,m}$ nach Gl. (4b) ergibt

$$\frac{\lambda_s-\lambda}{\lambda} = F_1 + \frac{\vartheta_m-\vartheta_u}{\Delta\vartheta}F_2. \tag{9b}$$

Die Faktoren F_1 und F_2 bedeuten hier—mit p nach Gl. (5b)—

$$F_1 = 8p\frac{c^2}{a^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(\xi_m)\cdot\sin\left(\xi_m\frac{a}{c}\right)}{[\xi_m^2 + p\cos^2(\xi_m)]} \times \sum_{n=2,4,6\ldots}^{\infty}\frac{\sinh\left(\beta_{n,m}\frac{a}{c}\right)}{\beta_{n,m}^2\left[\sinh\beta_{n,m} + \frac{p}{\beta_{n,m}}\cosh\beta_{n,m}\right]}, \quad (10b)$$

$$F_2 = 16p\frac{c^2}{a^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(\xi_m)\cdot\sin\left(\xi_m\frac{a}{c}\right)}{[\xi_m^2 + p\cos^2(\xi_m)]} \times \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{\sinh\left(\beta_{n,m}\frac{a}{c}\right)}{\beta_{n,m}^2\left[\sinh\beta_{n,m} + \frac{p}{\beta_{n,m}}\cosh\beta_{n,m}\right]} \quad (11b)$$

und im Grenzfall $p \to \infty$ $(a \neq c)$

$$F_1^* = -8\frac{c^2}{a^2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin\left(\xi_m\frac{a}{c}\right)}{\xi_m^2} \times \sum_{n=2,4,6\ldots}^{\infty}\frac{\sinh\left(\beta_{n,m}\frac{a}{c}\right)}{\beta_{n,m}\cosh\beta_{n,m}}, \quad (10b^*)$$

$$F_2^* = -16\frac{c^2}{a^2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin\left(\xi_m\frac{a}{c}\right)}{\xi_m^2} \times \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{\sinh\left(\beta_{n,m}\frac{a}{c}\right)}{\beta_{n,m}\cosh\beta_{n,m}}. \quad (11b^*)$$

In den letzten Gleichungen werden die Wurzeln der Gl. (7)

$$\xi_m = \frac{(2m-1)}{2}\pi.$$

3.3. *Analytischer Befund*

Für Kreis- und Quadratplatte hat das eingangs des 2.Kapitels fixierte Modell von Plattengeräten mit isothermen Stirnflächen der Testplatte einschließlich des Schutzringgebietes zu der formal gleichen Fehlergleichung geführt:

$$\frac{\lambda_s - \lambda}{\lambda} = F_1 + \frac{\vartheta_m - \vartheta_u}{\Delta\vartheta}F_2 \quad (9)$$

wobei die Fehlerfaktoren F_1 und F_2 nach den Gln. (10) und (11) definiert sind. Diese hängen, außer von dem dimensionslosen Wärmeaustauschparameter p, von geometrischen Größen ab, die durch Zusammenfassen ebenfalls dimensionslos gemacht werden können:

$$VS = \frac{z_0}{2r_0} \text{ bzw } \frac{z_0}{2a} \quad (10)$$

das ist das Verhältnis der Probendicke zum Plattendurchmesser bzw. zur Kantenlänge; sowie durch

$$VB = \frac{r_2 - r_0}{2r_0} \text{ bzw } \frac{c-a}{2a} \quad (11)$$

dem Verhältnis der Schutzringbreite zu denselben Plattenmaßen wie zuvor. Durch das Einführen dieser Größen verschwinden in den Fehlerfaktoren F_1 und F_2 sämtliche dimensionsbehafteten Größen, und ihre Abhängigkeit beschränkt sich auf die unabhängigen Variablen p, VS, VB.

Ersichtlich ist der Fehler keine Konstante, wie sich bei zweidimensionalen Näherungsrechnungen z.B. bei Woodside [2] ergibt, sondern hängt außer von F_1 (p, VS, VB) und F_2 (p, VS, VB) (die für denselben Einbau in ein Plattengerät konstante Faktoren F_1 und F_2 ergeben) maßgeblich von der reduzierten Temperaturdifferenz $(\vartheta_m - \vartheta_u)/\Delta\vartheta$ ab.

Wie in später folgenden Rechnungen noch begründet werden wird, ist im praktischen Gebrauchsbereich der drei Variablen p, VS, VB vorwiegend

$$F_1 \ll F_2,$$

so daß der erste Fehlerfaktor vernachlässigt werden kann:

$$\frac{\lambda_s - \lambda}{\lambda} \approx \frac{\vartheta_m - \vartheta_u}{\Delta\vartheta}F_2. \quad (12)$$

Bei einstellbarer Umgebungstemperatur ϑ_u auf die mittlere Meßtemperatur $\vartheta_m = \frac{1}{2}(\vartheta_2 + \vartheta_1)$ hat der Experimentator somit die Möglichkeit, den Randfehler so klein zu machen, wie es die Unsicherheiten der Einzeltemperaturmessungen erlauben. Wird dagegen die Ungebungstemperatur nicht beachtet, kann der versuchskonstante Fehlerfaktor F_2 u.U. durch nicht bemerktes positives oder negatives Anwachsen der reduzierten Temperaturdifferenz vervielfacht werden.

Bemerkenswert ist, daß nach Gl. (12) auch ohne quantitative Kenntnis des Faktors F_2 der Fehler durch sinnvolles Anpassen der Umgebungstemperatur ϑ_u klein gehalten werden kann.

4. EXPERIMENTELLE ÜBERPRÜFUNGEN

Im Hinblick auf die abgeleiteten Ergebnisse wurde die eigene Doppelplattenapparatur (mit $r_0 = 61{,}0$ mm und $r_2 - r_0 = 41{,}0$ mm) nach Abb. 2 durch einen kupfernen Zusatzschild um die Probe herum ausgerüstet und mit einer Kupferschlange verlötet, die die Abschirmung mittels thermostatisiertem Umlaufwasser auf eine meß- und einstellbare Temperatur (die 'Umgebungstemperatur' ϑ_u) zu regeln gestattet. Zwischen Probe einschließlich Heiz- und Kühlplatten und 'Umgebung' wurde Wärmedämmstoff aus locker geschichteter Watte gebracht, um Konvektion zu vermeiden und Strahlung zu unterbinden.

Näherungsgleichung (12) nach λ_s (der gemessenen

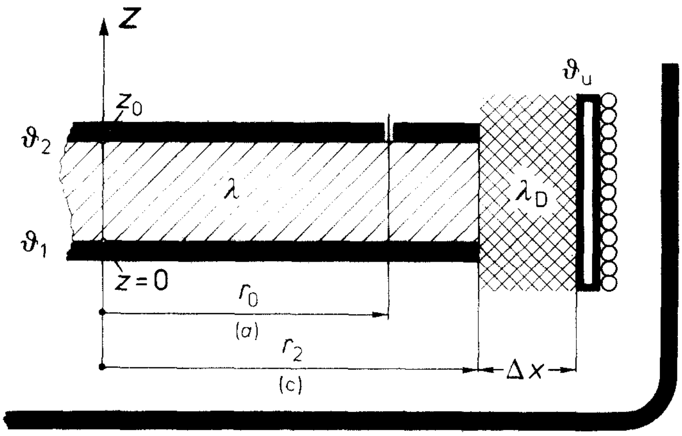

ABB. 2. Modifizierte Plattenapparatur mit isothermem Kupferschild, der die Umgebungstemperatur ϑ_u wählbar einzustellen gestattet.

Wärmeleitfähigkeit) aufgelöst ergibt

$$\lambda_s = \lambda + \lambda F_2(p, VS, VB) \cdot \frac{\vartheta_m - \vartheta_u}{\Delta\vartheta} \tag{13}$$

eine lineare Abhängigkeit der Meßwerte λ_s von der reduzierten Temperaturdifferenz $(\vartheta_m - \vartheta_u)/\Delta\vartheta$, wenn bei deren Variation die mittlere Temperatur ϑ_m und damit $\lambda(\vartheta_m)$ konstant gehalten wird.

Diese analytische Gesetzmäßigkeit wurde durch gezielte Änderungen der Umgebungstemperatur ϑ_u mit Hilfe obiger Zusatzeinrichtung experimentell überprüft, wobei ϑ_m konstant gehalten wurde. Um den zu erwartenden Effekt möglichst groß zu machen, wurde eine möglichst hohe, stoffmäßig noch zulässige Meßtemperatur von ϑ_m 60°C gewählt. Das Ergebnis zeigt Abb. 3, das die lineare Abhängigkeit der gemessenen Wärmeleitfähigkeiten λ_s von der reduzierten Temperaturdifferenz bestätigt. Die wahre Wärmeleitfähigkeit der Probe λ ergibt sich am Schnittpunkt der eingezeichneten Näherungsgeraden mit der Ordinate bei $(\vartheta_m - \vartheta_u)/\Delta\vartheta = 0$.

Weiterhin kann man die Neigung der Geraden bestimmen, die nach Gl. (13) gleich λF_2 sein soll; nach Division mit dem jetzt bekannten λ ergibt sich das

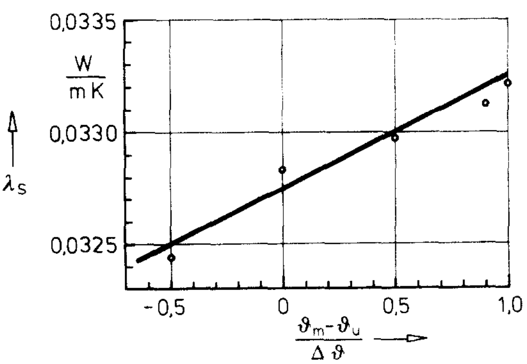

ABB. 3. Wärmeleitfähigkeitsmeßwerte λ_s von Extruderschaum über der reduzierten Temperaturdifferenz. (ϑ_m = Mittel-, $\Delta\vartheta$ = Differenz zwischen Heiz- und Kühlplattentemperatur; ϑ_u = Umgebungstemperatur). Meßwerte durch Gerade angenähert.

experimentelle F_2. Bei dem Vergleich mit zuvor berechneten F_2 (p, VS, VB)-Werten für die festliegenden geometrischen Größen und für p-Werte von 0,1 bis ∞ findet man Übereinstimmung von berechnetem und experimentellem Faktor F_2 bei p zwischen den Zahlenwerten 2 und 3. Aus p wiederum läßt sich aus der Beziehung

$$p = \frac{\alpha r_2}{\lambda} \approx \frac{\lambda_D/\lambda}{\ln\left[1 + \frac{\Delta x}{r_2}\right]}$$

die Wärmeleitfähigkeit λ_D des Wärmedämmstoffes berechnen, die hier die plausible Größe der Wärmeleitfähigkeit von Luft ergibt. (In diesem speziellen Beispiel sind $F_2 \approx 0{,}02$ und $F_1 \approx 0{,}0001$).

In ähnlicher Weise wurden Messungen ausgewertet, bei denen auf eine Wärmedämmung zwischen Probenrand und Kupferabschirmung verzichtet wurde. Der breite Luftspalt ließ eine Konvektion erwarten. Tatsächlich ergaben die Experimente α-Werte von 9 bis 10 $\mathrm{Wm^{-2}\,K^{-1}}$, die etwa der natürlichen Konvektion an senkrechten Wänden entsprechen.

Insgesamt zeigen diese experimentellen Ergebnisse, daß die Modellvorstellungen zu einer guten Annäherung der realen Gegebenheiten führen.

5. NUMERISCHE BERECHNUNGEN

Die Fehlerfaktoren F_1 und F_2 in Gl. (9) hängen von den apparatemäßig gegebenen Variablen VS und VB ab, die mithin für dieselbe Apparatur und denselben Probekörper unveränderten Einfluß haben. Verbleibt noch die Abhängigkeit von dem Wärmeaustauschparameter p nach Gln. (5a) und (5b), dessen Größe zunächst abgeschätzt werden soll.

5.1. *Der Wärmeaustauschparameter* p

$p = 0$ bedeutet vollkommene Wärmeisolation am äußeren Rande des Schutzringes: das Temperaturfeld im Probekörper und im Schutzring bleibt ungestört, und der Gesamtfehler verschwindet ($F_1 = F_2 = 0$). - Wird am Rand kein Wärmedämmstoff verwendet, sondern Luft belassen, so stellt sich, wie die obigen

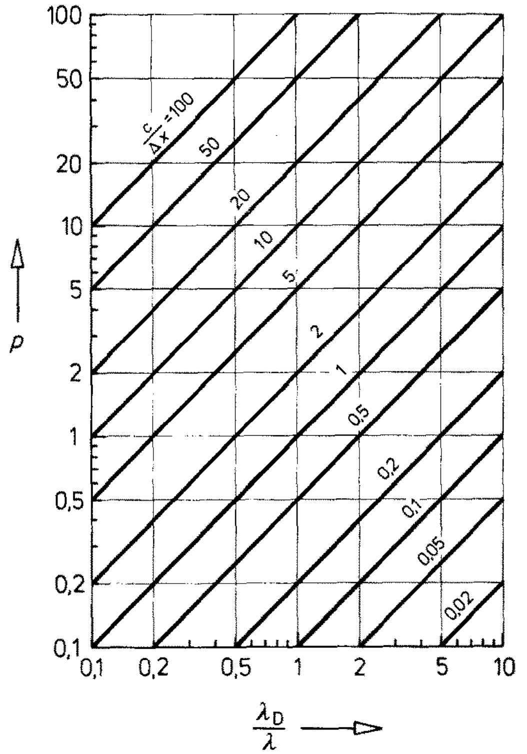

ABB. 4. Wärmeaustauschparameter p für quadratische Platten bei Verwendung eines Wärmedämmstoffes um die Meßanordnung. λ = Wärmeleitfähigkeit der Meßprobe, λ_D des Dämmstoffes; c = halbe Testplattenkantenlänge (Schurzringaußenmaß); Δx = Abstand zwischen Außenkante Schutzring bis zur 'Umgebung'.

Versuche zeigen, Konvektion ein, die je nach Gerätegröße zu verhältnismäßig großen p-Werten (etwa 20, 30, 50) führen. Bei den Berechnungen von F_1 und F_2 zeigt sich, daß bei mutmaßlicher Konvektion (mit praktisch unbekanntem α) p ohne großen Rechenfehler durch ∞ angenähert werden kann. Das führt zu etwas höheren, aber sichereren F_1 und F_2-Werten.

Bei Verwendung eines Dämmstoffes der Wärmeleitfähigkeit λ_D kann α in guter Annäherung durch

$$\alpha \approx \frac{\lambda_D}{r_2 \ln\left[1 + \dfrac{\Delta x}{r_2}\right]}$$

für den Kreisfall bzw. $\alpha \approx \lambda_D/\Delta x$ für das quadratische Problem ersetzt werden. Dann wird

$$p \approx \frac{\lambda_D/\lambda}{\ln\left[1 + \dfrac{\Delta x}{r_2}\right]} \quad \text{bzw.} \quad p \approx \frac{\lambda_D/\lambda}{\Delta x/c} \qquad (13)$$

bei Kreis- bzw. Quadratplatte. Für letztere sind die Verknüpfungen im Diagramm der Abb. 4 dargestellt.

5.2. *Fehlerfaktor* F_2

Einen groben Überblick über die auftretenden Größenordnungen vermittelt Abb. 5. F_2 ist dort im logarithmischen Maßstab für die drei reduzierten Schutzringbreiten VB = 0,25; 0,375; 0,5 über der reduzierten Probenstärke VS aufgetragen; der Parameter p ist von = 0,1 bis ∞ aufgeschlüsselt.

Die berechneten Werte gelten für die quadratische Plattenapparatur; diese Darstellung wurde mit Rücksicht auf die überwiegende Gebrauchspraxis des quadratischen Gerätetypus' gewählt. Die entsprechenden

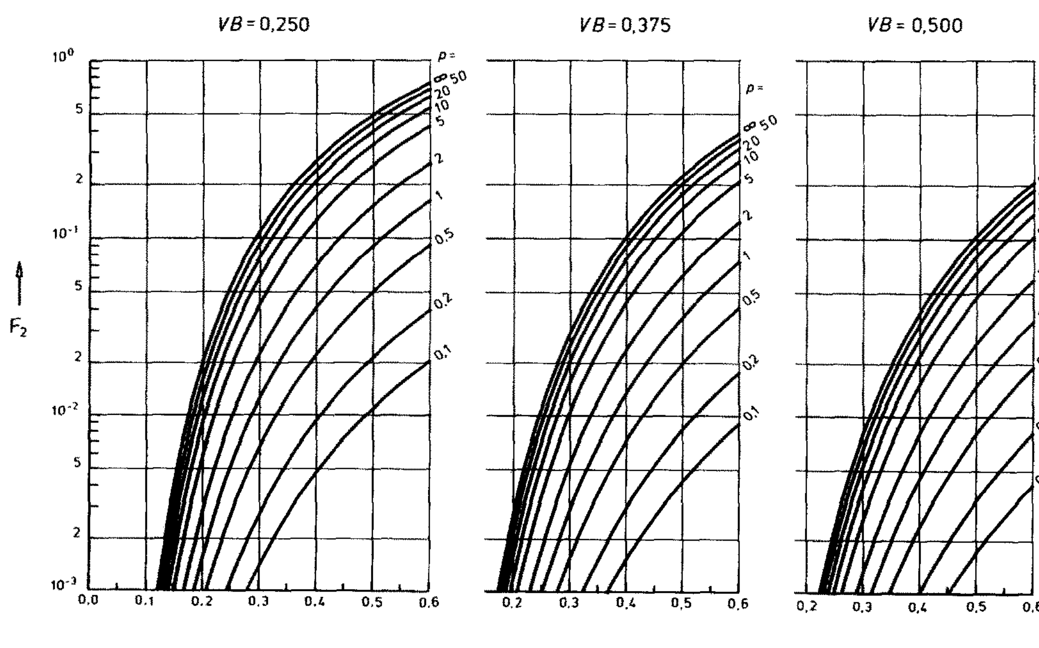

ABB. 5. Fehlerfaktor F_2 (VS, VB, p) über der reduzierten Plattenhöhe VS (Plattenhöhe durch Kantenlänge $2a$) für drei reduzierte Schutzringbreiter VB (Schutzringbreite durch Kantenlänge) mit Parameterwerten p.

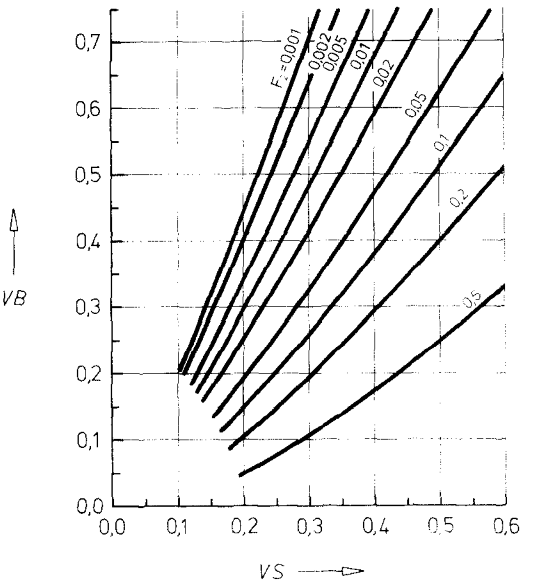

ABB. 6. Kurven konstanten Fehlerfaktors F_2 für den Wärmeaustauschparameter $p \to \infty$ im VB (Ordinate) – VB (Abszisse) Diagramm.

Werte für die Kreisplattengeräte unterscheiden sich hiervon nur geringfügig, wenn dieselben VS, VB und p-Werte gelten. In den zeichnerischen Wiedergaben werden die Unterschiede meist von der Kurvenstrichstärke überdeckt. Allgemein sind die Zahlenwerte im Kreisfall etwas größer als die der quadratischen Platte. Wie schon erwähnt wurde, ist F_2 im Gültigkeitsbereich der noch zu besprechenden Näherung $F_1 \ll F_2$ repräsentativ für den Randfehler, der nicht nur von den geometrischen Verhältnissen abhängt, da F_2 noch mit der reduzierten Temperaturdifferenz multipliziert werden muß.

Wie zu erwarten war, wird der Fehlerfaktor umso größer, je kleiner die Schutzringbreite und je größer die Probendicke ist; außerdem wächst der Fehler mit größerwerdenden p-Werten. $p \to \infty$, als höchste Grenze eingesetzt, führt zu einer sichereren Abschätzung.

Abb. 6 soll darüber informieren, welcher VS-Wert (Probenhöhe durch Plattenlänge) nicht überschritten werden darf, wenn bei gegebenem VB (Schutzringbreite durch Plattenlänge) ein gewünschter F_2-Wert gewahrt werden soll. Hierbei ist der Wärmeaustauschparameter $p \to \infty$ zugrundegelegt. Beispiel: Bei $VB = 0{,}25$ soll F_2 nicht größer werden als 5%; dies ist gesichert, solange $VS < 0{,}245$. Für die nach DIN 52 612 [3] genormte Apparatur mit einer Kantenlänge von 500 mm und einer Schutzringbreite von 125 mm (entspr. $VB = 0{,}25$) ergäbe dies eine maximale Probenhöhe von $0{,}245 \cdot 500$ mm $= 122{,}5$ mm.

Ähnlich ist Tabelle 1 zu handhaben. Hier ist der feste Fehlerfaktor $F_2 = 1\%$ vorgegeben und für gebräuchliche VB-Werte und die möglichen p-Variationen das jeweilige VS tabelliert.

5.2.1. *Messungen ohne Schutzring.* Trotz der bekannten Störanfälligkeit schutzringloser Messungen findet man auch in der Gegenwartsliteratur immer wieder Publikationen solcher Untersuchungen. In Verkennung der Realitäten werden besonders Stoffe mit niedriger Wärmeleitfähigkeit als vermeintlich günstig charakterisiert, obwohl gerade diese zu einem hohen p-Wert führen (siehe Gl. (5)).

Die Gln. (10) und (11) erlauben auch, den schutzringlosen Fall ($VB = 0$ bzw. $r_2 = r_0$ oder $c = a$) einzubeziehen; allerdings müssen Gln. (10*) und (11*) (für $p \to \infty$) ausgeschlossen werden, da sie auf divergierende Reihen führen†). Das Ergebnis der Rechnungen für den Fehlerfaktor F_2 zeigt Abb. 7. Die quantitative Größenordnung von F_2 begründet eindringlich die Fehleranfälligkeit, die Messungen ohne Schutzring erwarten lassen.

5.3. *Fehlerfaktor* F_1

Die Gesamtheit der Größen F_1 (p, VS, VB) ähnelt qualitativ der von F_2, insbesondere gilt auch hier: Kleine Schutzringbreite VB und größere Probendicken VS führen zu höheren F_1-Werten; ebenso wächst F_1 mit größerwerdendem p. Stets ist aber F_1 kleiner als F_2. Der Bruch F_1/F_2 wird umso größer, je größer p ist. In Abb. 8 ist F_1/F_2 für $p \to \infty$ über VB aufgetragen

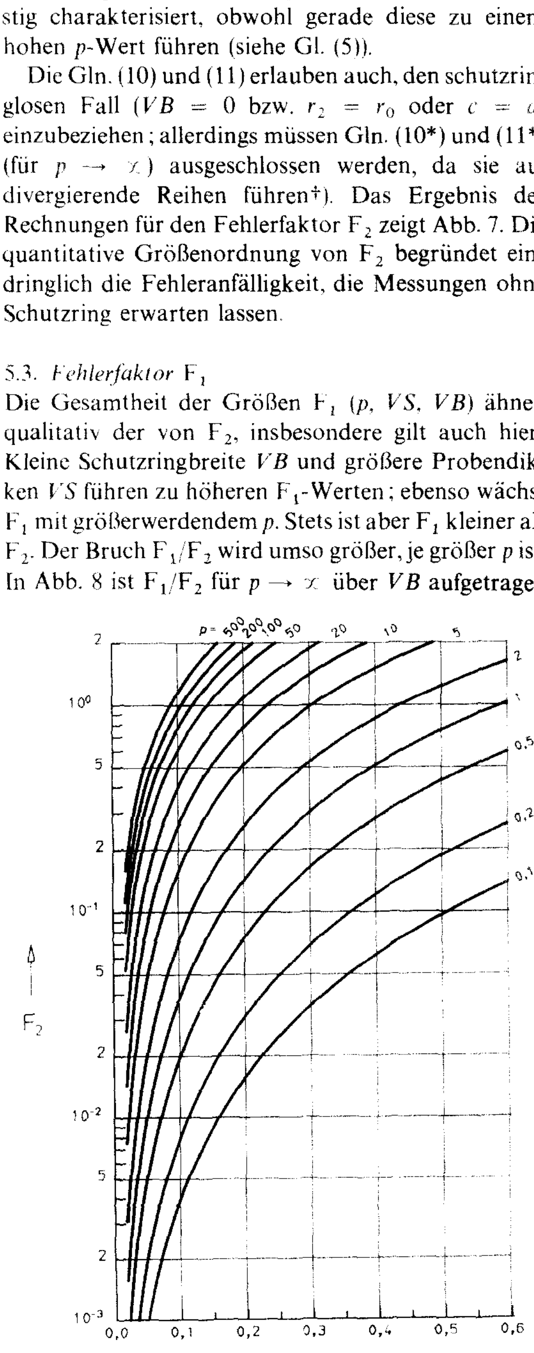

ABB. 7. Fehlerfaktor F_2 über der reduzierten Plattenhöhe VS für Plattenapparaturen ohne Schutzring ($VB = 0$). Wärmeaustauschparameter p. (Für $p \to \infty$ wird F_2 beliebig groß).

† Während die Fehlerformeln im Fall $VB = 0$ und gleichzeitig $p \to \infty$ versagen, konvergieren die Reihen in Gln. (3) für die Temperaturfelder: Es ergibt sich dort für $\vartheta(r, z)$ bzw. $\vartheta(x, y, z)$ eine Temperaturverteilung, die am äußeren Rand des Schutzrings in die konstante Temperatur ϑ_u übergeht.

Tabelle 1. Maximalwerte VS (Probenhöhe durch Kantenlänge) bei quadratischer Platte für Fehlerfaktor $F_2 = 1\%$; VB: Schutzringbreite durch Kantenlänge; p: Wärmeaustauschparameter nach Gl. (5b)

	$VB =$	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75
$p = \infty$	$VS =$	0,15	0,17	0,20	0,23	0,26	0,28	0,31	0,34	0,36	0,39	0,41	0,44
50,0		0,15	0,18	0,21	0,24	0,27	0,29	0,32	0,35	0,37	0,40	0,42	0,45
20,0		0,16	0,19	0,22	0,25	0,28	0,30	0,33	0,36	0,38	0,41	0,44	0,46
10,0		0,17	0,20	0,23	0,26	0,29	0,32	0,35	0,37	0,40	0,43	0,46	0,48
5,0		0,19	0,22	0,25	0,28	0,31	0,34	0,37	0,40	0,43	0,46	0,48	0,51
2,0		0,22	0,25	0,29	0,32	0,35	0,38	0,42	0,45	0,48	0,51	0,54	0,57
1,0		0,25	0,29	0,32	0,36	0,39	0,43	0,46	0,50	0,53	0,56	0,59	0,63
0,5		0,29	0,33	0,37	0,41	0,45	0,48	0,52	0,56	0,59	0,63	0,67	0,70
0,2		0,36	0,41	0,45	0,50	0,54	0,59	0,63	0,67	0,71	0,75	0,79	0,83
0,1		0,43	0,49	0,54	0,59	0,64	0,69	0,74	0,78	0,83	0,88	0,92	0,97

mit VS als Parameter. Die F_1/F_2-Linien sind bei logarithmischem Maßstab der Ordinate praktisch Gerade, die für $VB = 0$ einen Grenzwert nahe $F_1/F_2 = 0{,}5$ anstreben.

Als rechnerischer Grenzfall ergibt sich für $VS \to \infty$ (unendlich hoher Probekörper) für F_1/F_2 eine horizontale Gerade bei 0,5. Diesert Wert ist gleichzeitig der theoretische Maximalwert für F_1/F_2. Bei unzureichend kleinen Schutzringbreiten VB (z.B $VB < 0{,}25$) ist F_1/F_2 immer noch so groß, daß F_1 zu einem nicht vernachlässigbaren Anteil des Gesamtfehlers führt; eine Tatsache, die bei der Fehlerbeurteilung für Messungen ohne Schutzring erschwerend ins Gewicht fällt.

Oberhalb $VB = 0{,}25$ ist bei sinnvoller Wahl von VS der Zahlenwert von F_1/F_2 stets so klein, daß hindreichend begründet ist, den konstanten Fehleranteil F_1 (VS, VB, p) vernachlässigen zu dürfen.

Die gestrichelten Linien in Abb. 8 sind Kurven konstanten Fehlerfaktors F_2. Diese Darstellung läßt erkennen, daß bei praxisnahem Bemühen, den einfluß-

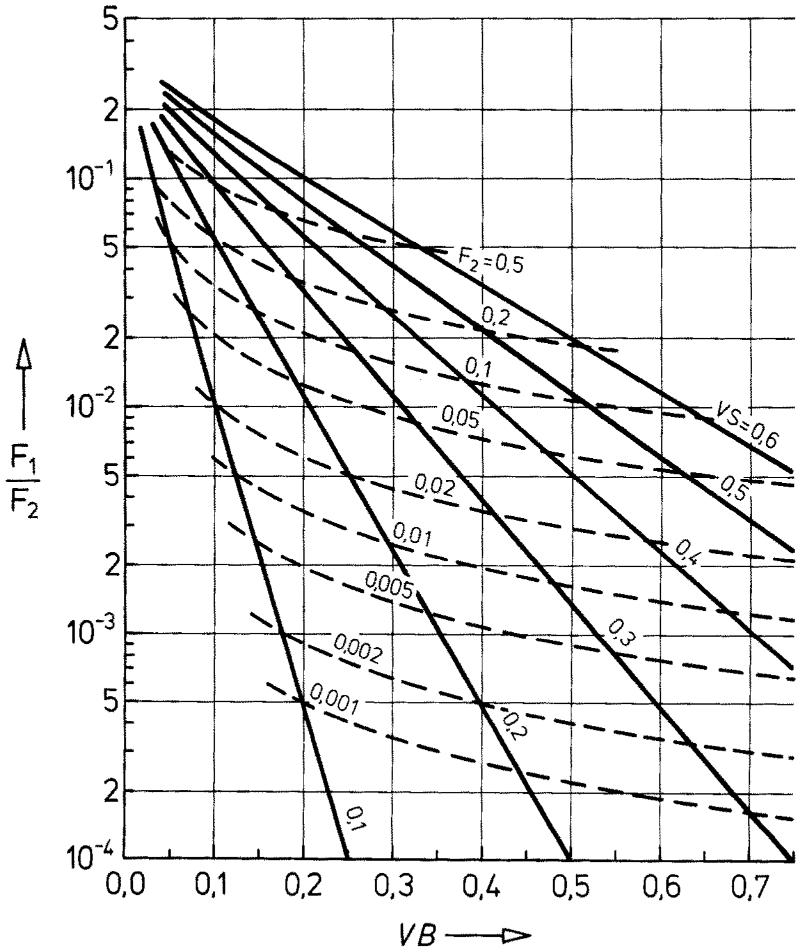

Abb. 8. Quotient F_1/F_2 der Fehlerfaktoren über der reduzierten Schutzringbreite für $p \to \infty$; Parameter (ausgezogene Kurven) reduzierte Probenhöhe VS. Gestrichelte Kurven sind Linien konstanten Fehlerfaktors F_2.

reichen Fehlerfaktor F_2 hindreichend kleinzuhalten (z.B. 1%), F_1/F_2 nur einige Tausendstel beträgt; daß andererseits große F_2-Werte (z.B. 20%), die die Messung ohnehin wertlos machen, zusätzlich hohe F_1-Werte mit sich bringen.

Anerkennung— Herr H. W. Krupke hat weitgehend die Programmierarbeiten bei den numerischen Rechnungen durchgeführt; Herr R. Jugel hat die experimentellen Untersuchungen vorgenommen. Beiden Mitarbeitern schulde ich aufrichtigen Dank.

LITERATUR

1. R. Poensgen, *Z. Ver. dt. Ing.* **56**, 1653 (1912); und Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenierwesens Heft 130 (1912).
2. W. Woodside, Symposium on Thermal Conductivity Measurements and Applications of Thermal Insulations. *Am. Soc. Testing Mats*, No. 217, 49 (1957).
3. DIN 52 612, Teil 1 Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit mit dem Plattengerät.

THERMAL CONDUCTIVITY MEASUREMENT WITH THE PLATE APPARATUS: INFLUENCE OF THE GUARD RING WIDTH ON THE ACCURACY OF MEASUREMENT

Summary—The temperature field in circular and square plate test specimens is calculated and thereby the error from the heat exchange at the outer edge of the guard ring derived for single and double plate devices under conditions of isothermal hot and cold plates and ideal thermal contact. The error is shown to be proportional to the reduced temperature difference (difference between the mean specimen and the ambient temperatures divided by the difference between the hot and cold plate temperatures) and the margin of error, therefore, can be optimally reduced by an appropriate adjustment in the ambient temperature. Experiments on an extruder foam confirm the results of the analytical calculations. Diagrams and tables which are developed on the basis of the above derived relationships, make possible estimation of margin of error for different measuring arrangements for plate devices of usual sizes.

MESURE DE LA CONDUCTIVITE THERMIQUE AVEC L'APPAREIL A PLAQUE: INFLUENCE DE LA LARGEUR DE L'ANNEAU DE GARDE SUR LA PRECISION DE LA MESURE

Résumé—La température dans les éprouvettes plates circulaires et carrées est calculée et l'erreur due à l'échange thermique à l'extérieur de l'anneau de garde est dérivée, pour des montages à une ou deux plaques, sous des conditions de plaques chaudes et froides et de contact thermique idéal. L'erreur est proportionnelle à la différence de température réduite (différence entre les temperatures moyennes de l'échantillon et de l'ambiance, divisée par la différence des températures des plaques chaude et froide) et la marge d'erreur peut être réduite par un ajustement approprié à la température ambiante. Des expériences sur de la mousse confirme les résultats des calculs analytiques. Des diagrammes et des tables établies à partir de cette étude permettent l'estimation de la marge d'erreur pour différentes conditions de mesure sur des dispositifs à plaque de taille usuelle.

ИЗМЕРЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПЛАСТИНЧАТЫМ ПРИБОРОМ: ВЛИЯНИЕ ШИРИНЫ ПРЕДОХРАНИТЕЛЬНОГО КОЛЬЦА НА ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ

Аннотация — Рассчитывается температурное поле в круглых и квадратных пластинчатых образцах, и определяется ошибка в измерениях величины теплового потока на внешней поверхности предохранительного кольца в приборах с единичной и сдвоенными пластинами в условиях изотермического нагрева и охлаждения и идеального термического контакта. Показано, что ошибка пропорциональна приведенной разности температур (отношение разностей температур образца и окружающей среды и температур нагретой и охлажденной пластин), поэтому она может быть уменьшена путем подбора соответствующей температуры окружающей среды. Результаты аналитических расчетов проверены экспериментально. Диаграммы и таблицы, составленные на основе предложенных соотношений, позволяют оценить пределы ошибок для различных измерительных пластинчатых приборов обычных размеров.